GEOMETRI FRAKTAL DENGAN PEMROGRAMAN JAVA

Fiska Kusuwawati[1), Palgunadi[2), Dahlan Susilo[1)

1) Program Studi Teknik Informatika, Universitas Sahid Surakarta
Jl. Adi Sucipto 154, Jajar, Surakarta, 57144, Telp. (0271) 743493, 743494
Email: Fiska_kusuma@yahoo.co.id
2) Program Studi Matematika, Universitas Sebelas Maret
Jl. Ir Sutami, Surakarta

Abstract

*Fractal geometry is branch of mathematics that studies the properties and behavior of fractal. In development fractal is branch of computer grpaphics. In this examination, fractal is discussi to develop computer graphics. The development does with literature and simulation based on former of each the curve. There are four fractal will be discussied in this examination, Koch curves, String Grammars, Julia and Mandelbrot Set. Koch curves are formed from line and angel rotation (α). For String Grammars the former of component is curve sentence, formulated with F : (axiom, F-string, f-string, X-string, Y-string, sudut). Mandelbrot and Julia Set are generation a set of complex number $z_{n+1} = \mathbf{z}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}} + \mathbf{c}$. Where **c** belongs to the set of all complex numbers. Koch curve has a good curve if it has special angel (30^0, 45^0, 60^0) except 90^0. Example of product from String Grammars are Dragon, Hilbert, Sierpinski, Island, Tree1, Tree2, and Tree3. Madelbrot and Julia Set has good curve if it has **z** coefficient among -2 up to 2 for Real and -2 up to 2 for the Imaginer and the number of iteration is bigger then 50, and the constant |**c**| is less then 1.*

Keywords *: Geometry Fractal, Curve Koch, String Grammars, Mandelbrot Set, Julia Set*

Pendahuluan

Perkembangan arsitektur komputer yang semakin cepat dan canggih membawa dunia ini kedalam peradabanyangbaru. Seiring dengan semakin canggihnya komputer, kemampuan komputasinya pun juga semakin tinggi. Sangat banyak hal–hal yang pada mulanya tidak mungkin dikerjakan oleh manusia dalam waktu yang singkat mampu dikerjakanoleh komputer.

Dengan adanya komputer bentuk fractal yang indah dapat digambarkan. Mandelbrot (Benoit B. Mandelbrot) disebut–sebut sebagai bapak geometry fraktal, akan tetapi sebagian orang menganggap bahwa geometry fractal telah dikembangkan oleh para matematikawan klasik seperti Georg Cantor(1872) yang dikenal dengan teori himpunan Cantor (Cantor set), Giueseppe Peano (1890) dengan kurva Peano, David Hilbert (1891) dengan kurva Hilbertnya, Helge Von Koch (1904) dengankurvaKoch, Waclaw Sierpinski (1916) dengan kurva Sierpinski,Gaston Julia (1918) dengan himpunan Julia (Julia Set), Felix Hausdorff(1919).

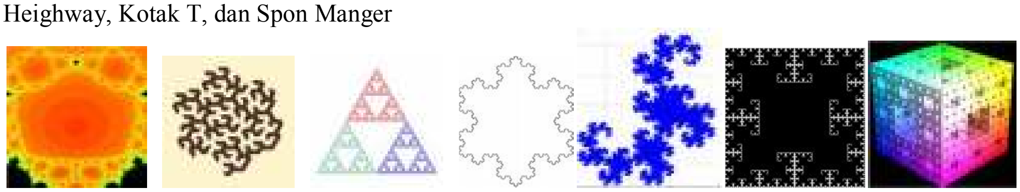
LandasanTeori
Fraktal

Geometri fraktal adalah cabang matematika yang mempelajari sifat-sifat dan perilakufractal
Dalam bentuknya sebagai kurva, fraktal mempunyai dua karakteristik utama yaitu:

a. nonrectifiable dengan istilah lainnya "tak berhingga"
b. *homogenus* atau homogen yang berarti kesamaan struktur dari setiap bagian.

Pengelompokan berikut didasarkan pada cara pendefinisian atau pembuatannya.

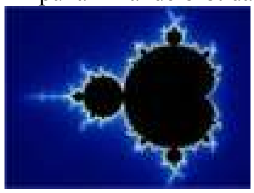
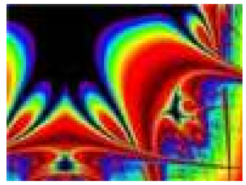
a. Sistem fungsi teriterasi
   Contoh : Himpunan Cantor, Karpet Sierpinski, Kurva Peano, Garis pantai Koch, Kurva naga Harter – Heighway, Kotak T, dan Spon Manger



Sumber : Google Search
Gambar 1. Contoh Fraktal sistem fungsi teriterasi

b. Fraktal waktu lolos

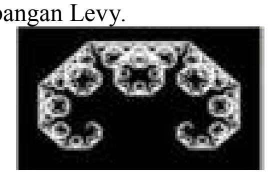
Contoh : himpunan Mandelbrot dan fraktal Lyapuanov.

Sumber : Google Search

Gambar 2. Contoh Fraktal waktu lolos

c. Fraktal acak, dihasilkan melalui proses stokastik
Contoh : landskap fraktal dan penerbangan Levy.

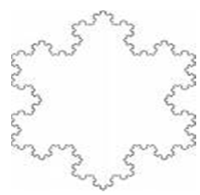
Sumber : Google Search

Gambar 3. Contoh Fraktal acak

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh kurva dari geometri fraktal diantaranya : kurva Koch, Sting Grammars, Mandelbrot Set dan Julia Set.

a. Kurva Koch

Kurva koch atau yang sering disebut bunga salju koch. Kurva koch ditemukan oleh matematikawan dari Swedia, Helge von Koch tahun 1904.



Gambar 4. kurva Bunga Salju Koch

Koch Kurva mempunyai karakteristik menarik,yaitu :

1) Masing – masing segmen adalah pertambahan panjang 4/3 dari sebuah faktor. Oleh karena itu, K_{n+1} adalah 4/3 sepanjang K_n, dan K_i mempunyai total panjang $(4/3)^i$.
2) Ketika n bertambah besar, kurva masih nampak untuk mempunyai kekasaran dan bentuk yang sama.
3) Ketika n menjadi tanpa batas, kurva mempunyai suatu panjang tanpa batas, sedangkan areanya terbatas.

b. String Grammars

String Grammars (fungsi kalimat) adalah sekumpulan karaktek yang membentuk kalimat yang akan menghasilkan sebuah kurva. Setiap karakter dari fungsi tersebut adalah sebuah perintah untuk menggambar kurva. Adapun karakternya sebagai berikut :

1) F : bergerak maju sejauh D dengan menggambar garis
2) f : bergerak maju sejauh D tanpa menggambar garis
3) + : putar ke kanan sebesar sudut α
4) – : putar ke kiri sebesar sudut α
5) [: simpan arah kurva
6)] : kembalikan arah kurva yang baru saja disimpan

Fungsi String Grammars dirumuskan dengan :

F : (axiom, F-string, f-string, X-string, Y-string, sudut)

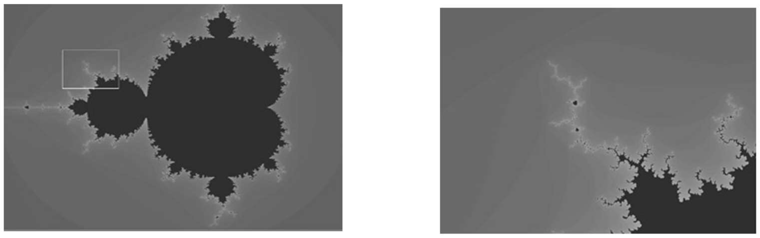
Keterangan :

Axiom : dari mana kurva dimulai
F-String : untuk membuat bergerak maju sejauh D dengan menggambar garis
f-String : untuk membuat bergerak maju sejauh D tanpa menggambar garis
X-String : untuk menggambar mulai dari X tanpa mempengaruhi kurva
Y-String : untuk menggambar mulai dari Y tanpa mempengaruhi kurva
Sudut : sudut putar kurva

c. Mandelbrot Set

Mandelbrot Set atau himpunan Mandelbrot adalah salah satu contoh fraktal yang cukup terkenal. Nama Mandelbrot Set diambil sesuai dengan nama penemunya Benît Mandelbrot, seorang ahli matematika Prancis.

Mandelbrot Set dapat memperlihatkan perbesaran dari fokus gambar awal, seperti yang terlihat pada Gambar 5.



a b

Gambar 5. Mandelbrot Set

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa gambar b merupakan perbesaran fokus dari gambar a.

Mandelbrot Set dilambangkan dengan M adalah himpunan dari bilangan kompleks, dengan rumus :

$$M = \{c \in K \mid \lim_{n\to\infty} \mathbf{z_n} = \mathbf{z_{n-1}^2} + \mathbf{c}, \mathbf{z_n} \neq \infty\} \qquad \text{(pers 1)}$$

Dimana : M = Mandelbrot Set
K = himpunan dari semua bilangan kompleks
c = bilangan konstan
n = 0,1,2,3, ...
z = bilangan kompleks

dan **z** sendiri didefinisikan dalam :

$\mathbf{z}_0 = 0$

$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z_n^2} + c$

sehingga untuk :

$\mathbf{z}_0 = 0$

$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z_0^2} + c = c$

$\mathbf{z}_2 = \mathbf{z_1^2} + c = c^2 + c$

$\mathbf{z}_3 = \mathbf{z_2^2} + c = (c^2 + c)^2 + c$

$\mathbf{z}_4 = \mathbf{z_3^2} + c = ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c$

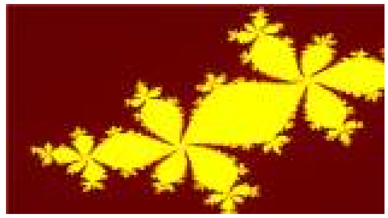
dan seterusnya

d. Julia Set

Julia Set ditemukan oleh seorang ahli matematika Prancis, Gaston Julia. Pola fraktal julia dibuat dari manipulasi persamaan $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z_n^2} + \mathbf{c}$, dimana :

z = bilangan kompleks,
c = suatu konstanta kompleks.

Komponen bilangan kompleks **z** = x + yi, dimana x adalah bilangan riil dan y adalah bilangan imajiner, dipetakan langsung ke sumbu Euclidian x dan y. Dengan melakukan pengulangan terus – menerus terhadap persamaan $\mathbf{z}_{n+1} = z_n^2 + c$ sampai batas pengulangan tertentu, untuk tiap titik $\mathbf{z}_n$ awal diperoleh dua jenis karakteristik posisi yaitu titik-titik yang selalu tetap pada batas tertentu dan titik-titik yang cenderung menjauh dan tak terbatas. Titik-titik yang berada dalam batas tertentu ini disebut titik tertahan, sedangkan titik yang menjauh disebut titik terlempar. Pada bidang gambar x - y, jika dari titik awal **z** diperoleh titik terlempar, maka banyaknya pengulangan digunakan sebagai warna titik asal tersebut. Sebaliknya jika dari titik awal x-y diperoleh titik tertahan, pada titik tersebut diwarnai dengan warna hitam. Dari proses tersebut diperoleh bangun fraktal Julia.



Gambar 6. Julia Set

UML

UML (*Unified Modeling Language*) adalah sebuah bahasa yang berdasarkan grafik/gambar untuk memvisualisasi, menspesifikasikan, membangun, dan pendokumentasian dari sebuah sistem pengembangan software berbasis OO (*Object-Oriented*).

UML mendefinisikan diagram-diagram :

1) *Use Case*

   Use Case mendefinisikan fitur apa yng harus disediakan sistem. *Use Case* menyatakan sifat sistem dari sudut pandang *user*. *User* adalah orang atau bagian lain dari sistem. Dalam penggambaran diagram *user* disebut dengan *actor*.

2) *Activity Diagram*

   Activity diagram menjelaskan aktifitas di dalam suatu use case

3) *Class Diagram*

   Class diagram merupakan static diagram utama untuk memodelkan kelas-kelas serta aturan dari kelas-kelas.

4) *Sequential Diagram*

   Sequential diagram mendeskripsikan bagaimana obyek-obyek saling berhubungan satu dengan lainnya sesuai dengan alur waktu.

Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk a + bi, di mana a dan b bilangan real dan $i^2 = -1$.

Contoh:

2 + 5i

a = 2

b = 5

Bilangan kompleks sering dilambangkan dengan **z**. Pada bilangan kompleks **z** = a + bi, maka :

1) a disebut bagian real dari **z**, disingkat Re(**z**) = a
2) b disebut bagian imaginer dari **z**, disingkat Im(**z**) = b

Dimensi Pecahan / Dimensi Fraktal

Setiap bentuk, memiliki dimensi misalnya 0 (titik), 1 (garis lurus dan kurva), 2 (bidang), atau 3 (ruang). Secara teoritis, dimensi ini telah diperluas termasuk dimensi keempat dan dimensi-dimensi yang lebih tinggi yang sulit untuk dibayangkan. Dengan memperluas karya dari Hausdroff, Besicovitch memajukan gagasan bahwa sebuah bentuk sebenarnya dapat memiliki ”dimensi pecahan”, seperti misalnya 1.5 atau 2.3. Dimensi kurva-kurva seperti segitiga Sierspinski dan garis pantai Koch harus dinyatakan dengan dimensi pecahan. Dengan demikian, tingkah laku yang ganjil dari kurva-kurva tersebut dapat dijelaskan. Dimensi pecahan ini dapat dihitung dengan tepat berdasarkan pengukuran dari sebuah kurva.

Dimensi Hausdroff/Besicovith didefinisikan sebagai nisbah dari logaritma jumlah salinan ukuran dari bentuk benih relatif terhadap setiap salinan. Karena ada 4 salinan (4 segmen garis) dan setiap salinan memiliki ukuran 1/3 ukuran benih, maka menurut definisi ini dimensi garis pantai Koch adalah log(4)/log (3) = 0.6021/0.4771 = 1.262.

Istilah dimensi pecahan kemudian oleh Benoit Mandelbrot diganti menjadi”dimensi fraktal”. Dimensi ini jauh lebih penting artinya bagi matematikawan karena mereka mendadak saja mampu mengukur keseluruhan bentuk-bentuk dalam jagad raya yang sebelumnya tidak bisa diukur. Untuk pertama kalinya sejak Descartes, sebuah meter pengukur ruang yang baru telah tercipta, meskipun apa yang telah diukur tetap belum diketahui secara pasti. Yang pasti Sierspinski, Koch, dan Hausdroff, tidak mengira bahwa perjalanan mereka ke tempat tak berhingga dari bentuk-bentuk abstrak dan ”tidak alamiah” akan kembali kepada ”geometri alam” sejati yang pertama.

Perancangan Fraktal

Penelitian dilakukan dengan studi literatur dan simulasi berdasarkan komponen pembentuk dari masing – masing kurva.

Rancangan Paramater

Bahan yang digunakan dalam pembuatan aplikasi geometri fraktal ini adalah komponen pembentuk kurva koch, komponen pembentuk String Grammars, serta komponen pembentuk Mandebrot dan Julia Set. Beberapa parameter yang akan digunakan sebagai bahan penelitian adalah :

1. **Kurva Koch**
   a. panjang garis kurva
      Panjang garis kurva tergantung dari besar kurva. Untuk itu perlu ditentukan ukuran kurvanya. Ukuran kurva ditentukan oleh besarnya Panel yang dibuat.
   b. sudut
      Sudut segitiga yang akan dicobakan adalah : 30^0, 45^0, 60^0, 90^0

2. **String Grammars**
   Komponen yang akan diujikan untuk StringGrammars adalah :
   Tabel 3.1. Tabel parameter pengujian String Grammars

(Axiom, StrF, Strf, StrX, StrY, Sudut)	**Initial**	**X**	**Y**	**Garis**	**Pengurang**
(*X*, *F*, *nil*, *X*+*YF*+, −*FX*−*Y*, 90)	0	0.50	0.5	0.60	0.60
(*X*, *F*, *nil*,−*YF*+*XFX*+*FY*−,+*XF*−*YFY*−*FX*+, 90)	0	0.25	0.25	0.80	0.47
(*YF*, *F*, *nil*, *YF*+*XF*+*Y*, *XF*−*YF*−*X*, 60).	0	0.33	0.5	0.38	0.51
(*F*+*F*+*F*+*F*, *F*+*f* −*FF*+*F*+*FF*+*Ff* +*FF* − *f* + *FF*−F−*FF*−*Ff* −*FFF*, *ffffff*, *nil*, *nil*, 90)	0	0.25	0.65	0.20	0.20
(*F*, *F*[+*F*]*F*[-*F*]*F*, *nil*, *nil*, *nil*, 25.7)	90	0.50	0.05	0.70	0.34
(*X*, *FF*, *nil*, *F*[+*X*]*F*[−*X*]+*X*, *nil*, 20.0)	90	0.50	0.05	0.45	0.50
(*F*, *FF*−[−*F*+*F*+*F*]+[+*F*−*F*−*F*], *nil*, *nil*, *nil*, 22.5)	90	0.50	0.05	0.25	0.50

3. **Mandelbrot Set**
   Berdasarkan rumus Mandelbrot adalah $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}}$ + c, maka parameter yang diperlukan adalah :
   a. Iterasi (n)
      n = 10, 50, 100, 200
   b. Warna kurva
      Warna dasar : merah, hijau, biru

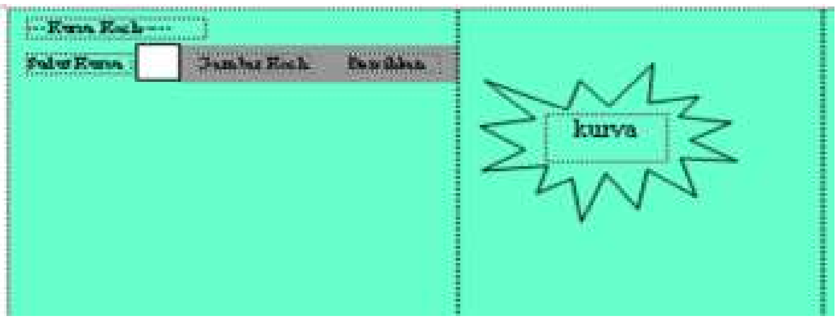
4. **Julia Set**
   a. Konstanta c
      c = (0.26, 0.57), (0.25, 0.52), (-0.5, 0.55), (0, 0.66)
   b. Iterasi (n)
      n = 10, 50, 100, 200
   c. Warna kurva
      Warna dasar : merah, hijau, biru

Desain GUI

Tampilan dibuat satu frame dengan empat panel, yaitu panel untuk kurva Koch, panel String Grammars, panel julia Set, dan Panel Mandelbrot Set.

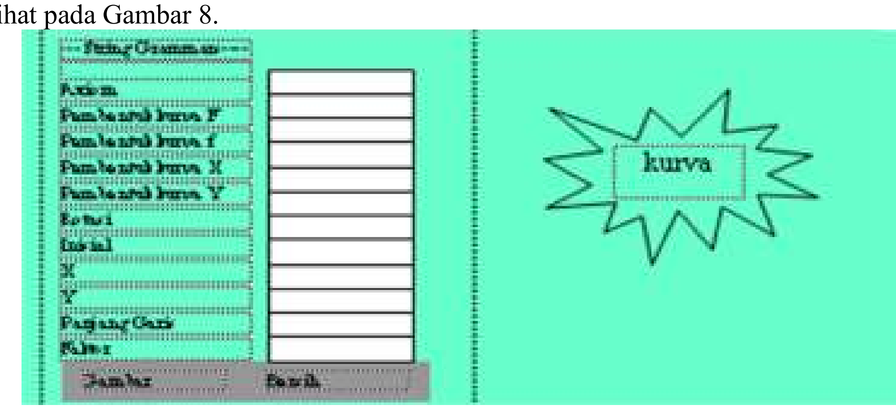
Satu Frame program dibagi menjadi 4 panel, yaitu :

1. Panel Koch
   Panel Koch digunakan untuk meletakkan kurva Koch, desain gambarnya terlihat pada Gambar 7.



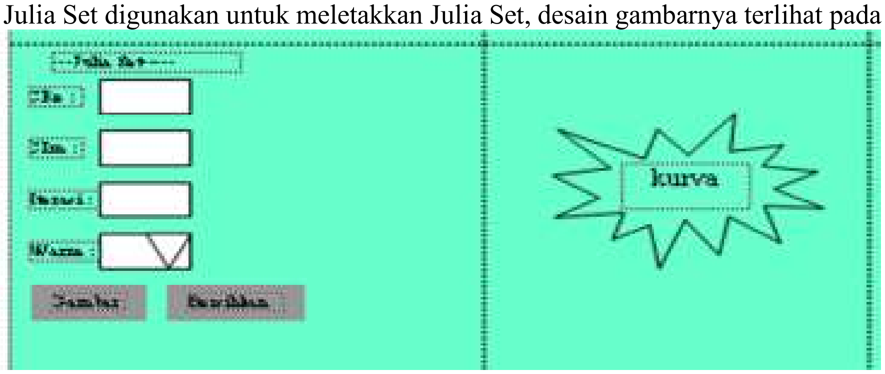
Gambar 7 .Panel Kurva Koch

2. Panel String Grammars
   Panel String Grammars digunakan untuk meletakkan String Grammars, desain gambarnya terlihat pada Gambar 8.



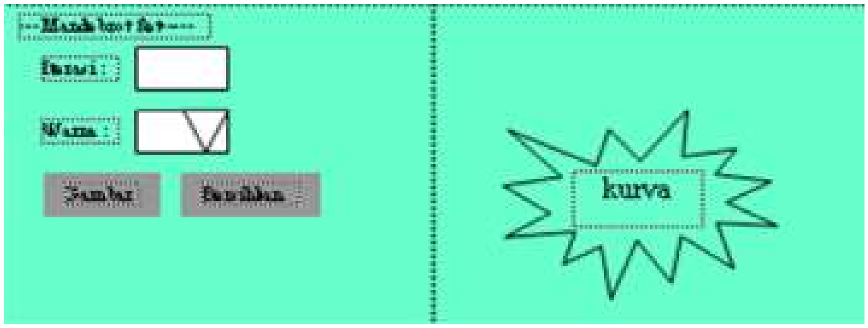
Gambar 8. Panel String Grammars

3. Panel Julia unutuk Julia
   Panel Julia Set digunakan untuk meletakkan Julia Set, desain gambarnya terlihat pada Gambar 9.



Gambar 9. Panel Julia Set

4. Panel Mandelbrot untuk Mandelbrot Set
   Panel Mandelbrot Set digunakan untuk meletakkan Mandelbrot Set, desain gambarnya terlihat pada Gambar 10.



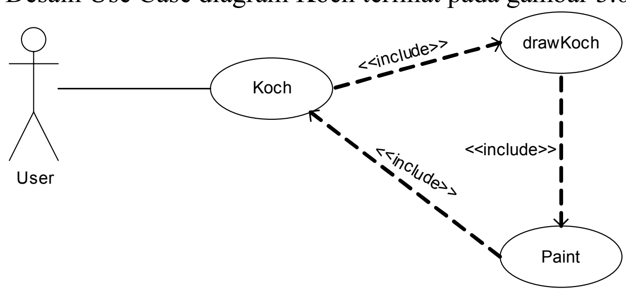
Gambar 10. Panel Mandelbrot Set

Desain UML

a. Kurva Koch

i. Use Case diagram

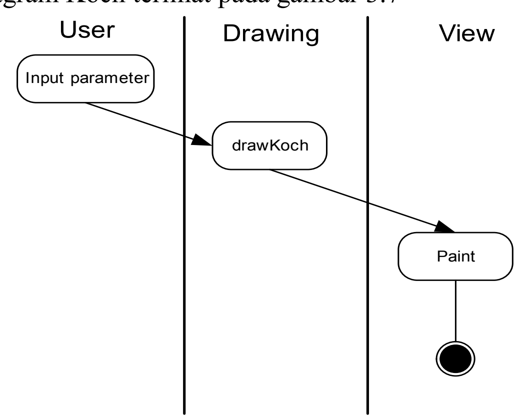
Desain Use Case diagram Koch terlihat pada gambar 3.6



Gambar 11. Use Case diagram Koch

ii. Activity diagram

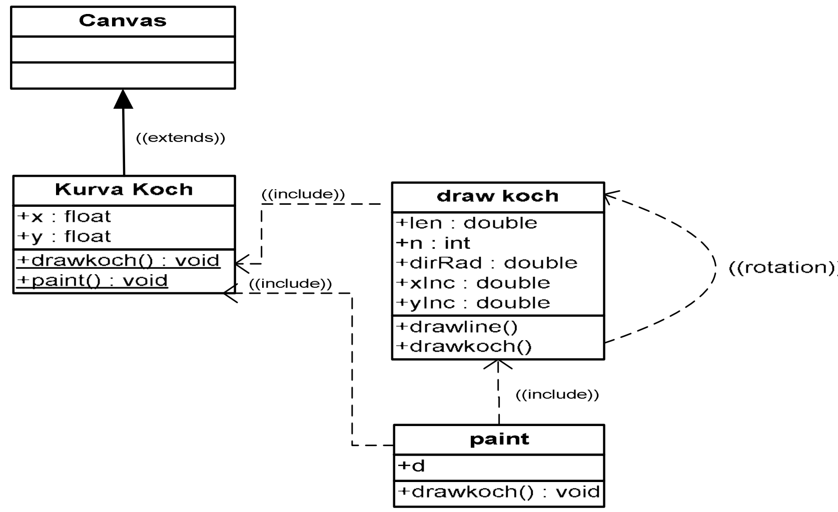
Desain Activity diagram Koch terlihat pada gambar 3.7



Gambar 12. Activity diagram Koch

iii. Class diagram

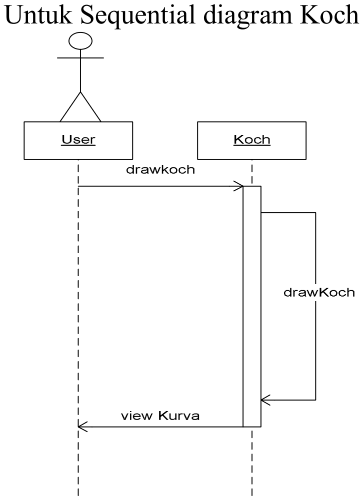
Class Koch merupakan extends dari Canvas. Class Koch memiliki ketergantungan terhadap dua method class yaitu drawKoch() yang berfungsi untuk menggambar kurva Koch dan paint() berfungsi menampilkan kurva.



Gambar 13. Class diagram Koch

iv. Sequential diagram

Untuk Sequential diagram Koch terlihat pada Gambar 14.

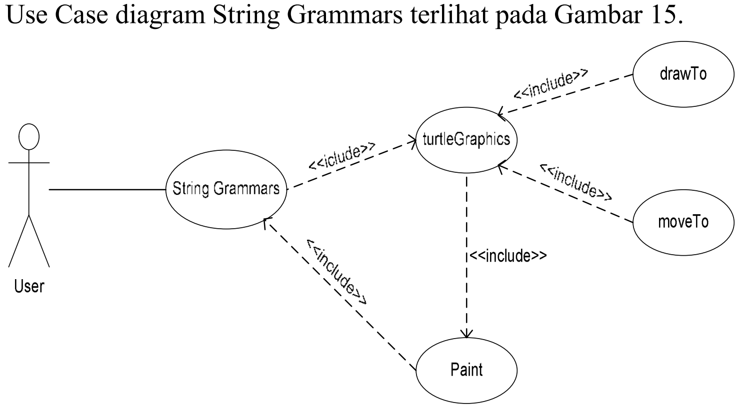


Gambar 14. Sequential diagram Koch

b. String Grammars

i. Use Case diagram

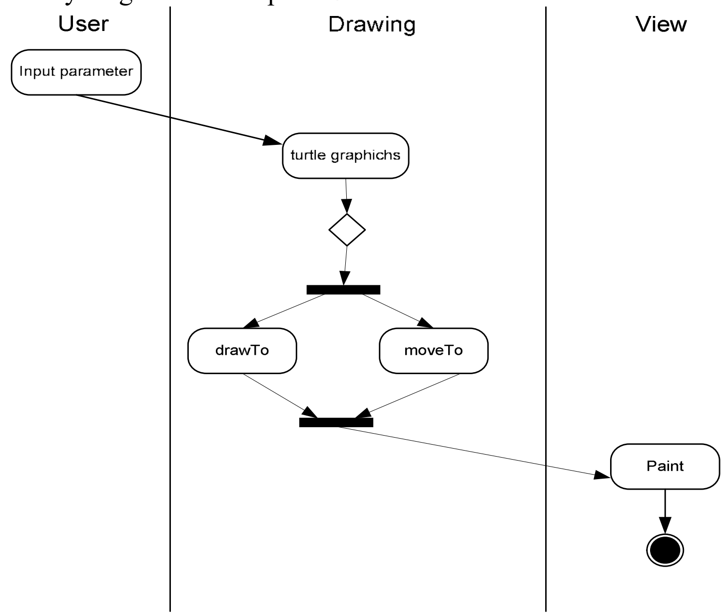
Use Case diagram String Grammars terlihat pada Gambar 15.



Gambar 15. Use Case diagram

ii. Activity diagram

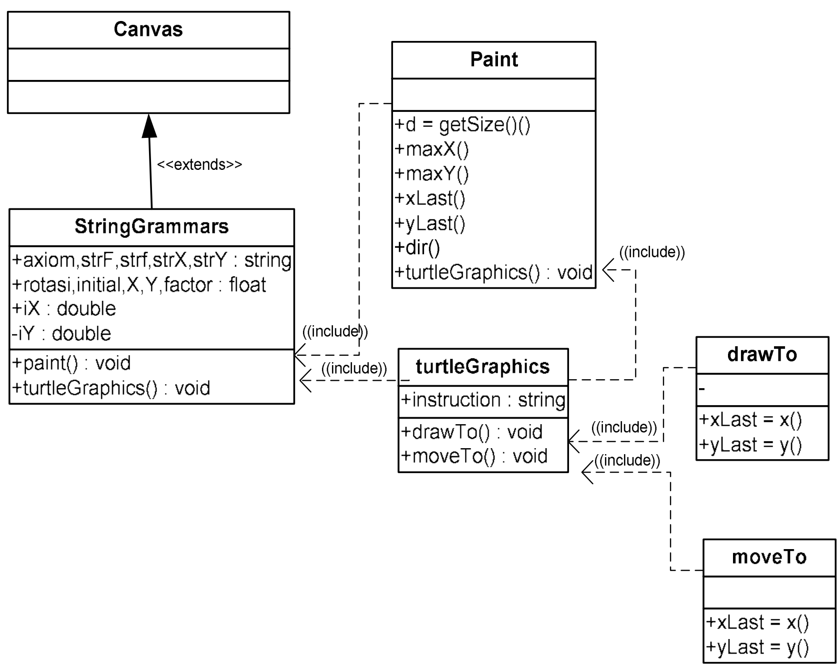
Desain Activity diagram terlihat pada Gambar 16.



Gambar 16. Activity diagram String Grammars

iii. Class diagram

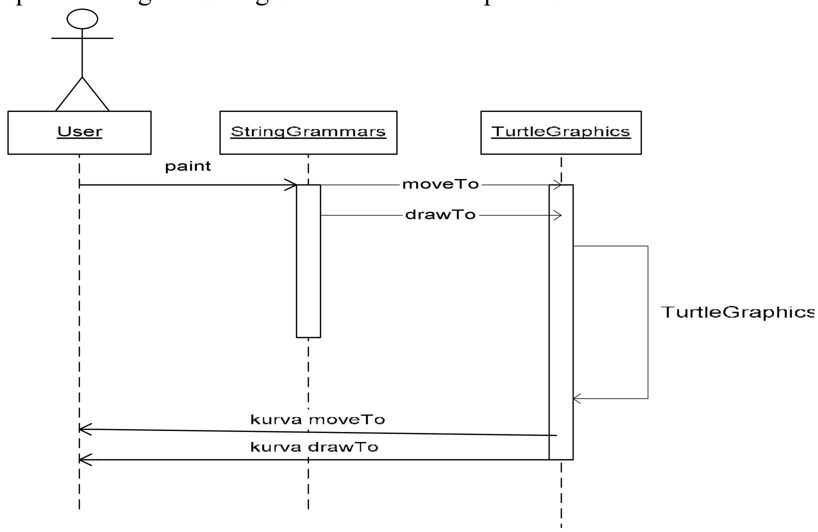
String Grammars merupakan extend dari Canvas. String Grammars mempunyai ketergantungan terhadap empat method class pendukungnya yaitu method turtleGraphics merumuskan pengambaran kurva, method paint untuk menampilkan kurva, method drawTo dan method moveTo merupakan method yang berhubungan dengan method turtleGraphics.



Gambar 17. Class diagram String Grammars

iv. Sequential diagram

Sequential diagram String Grammars terlihat pada Gambar 18.

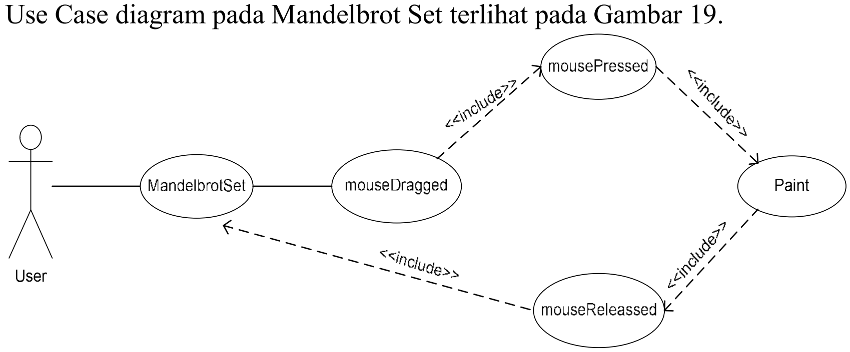


Gambar 18. Sequantial diagram String Grammars

c. Mandelbrot Set

i. Use Case diagram

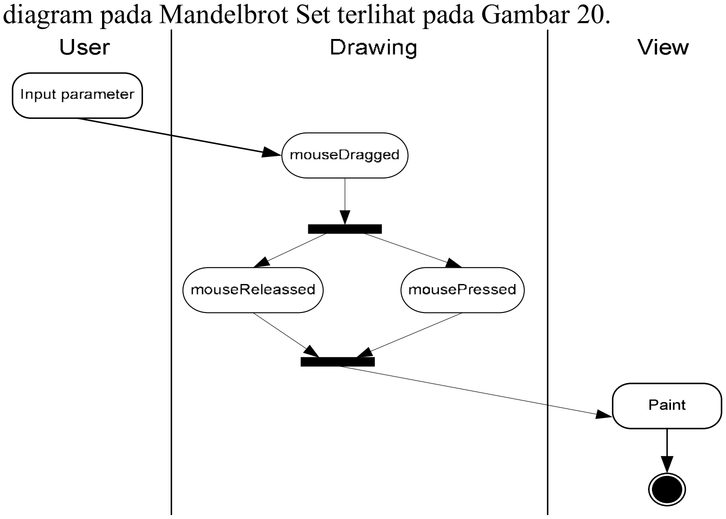
Use Case diagram pada Mandelbrot Set terlihat pada Gambar 19.



Gambar 19. Use Case diagram Mandelbrot Set

ii. Activity diagram

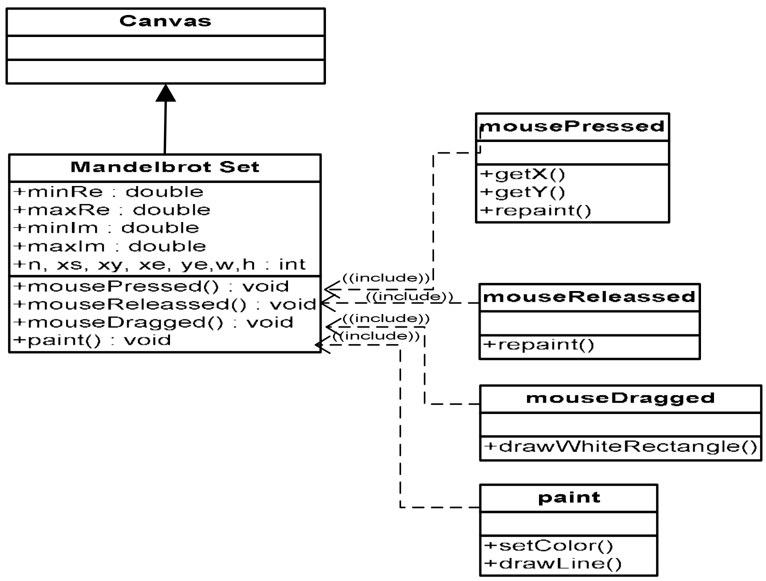
Activity diagram pada Mandelbrot Set terlihat pada Gambar 20.



Gambar 20. Activity diagram Mandelbrot Set

iii. Class diagram

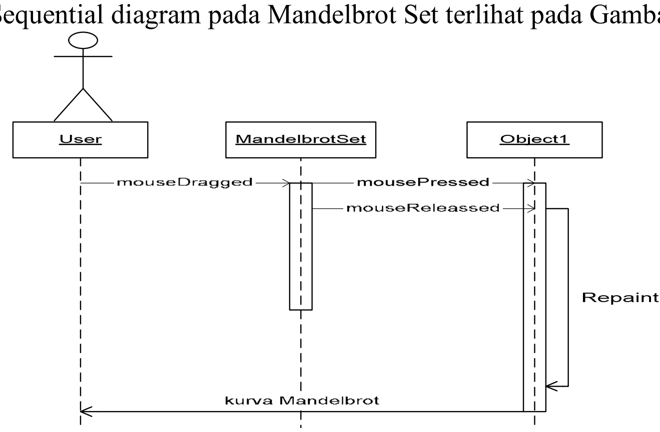
Mandelbrot Set merupakan extends dari Canvas. Mandelbrot Set didukung oleh method mousePressed digunakan untuk menangani aksi mouse, method mouseReleassed memiliki fungsi yang sama dengan method mouseReleassed, method mouseDragged digunakan untuk menggambar fokus ketika kita akan mengambil fokus Mandelbrot untuk melihat perbesarannya.



Gambar 21. Class diagram Mandelbrot Set

iv. Sequential diagram

Sequential diagram pada Mandelbrot Set terlihat pada Gambar 22.

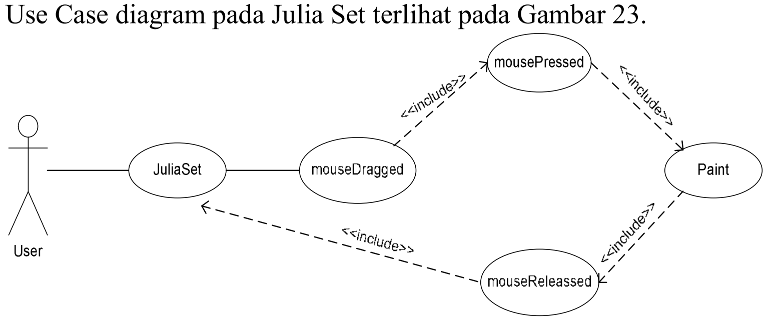


Gambar 22. Sequential diagram Mandelbrot Set

d. Julia Set

i. Use Case diagram

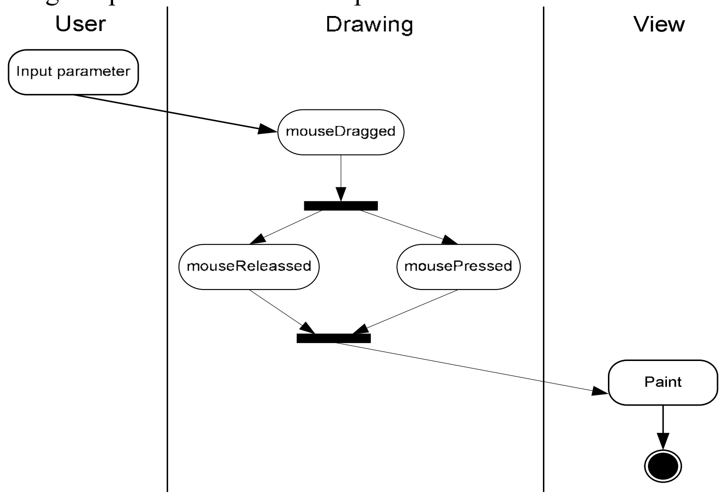
Use Case diagram pada Julia Set terlihat pada Gambar 23.



Gambar 23. Use Case diagram Julia Set

ii. Activity diagram

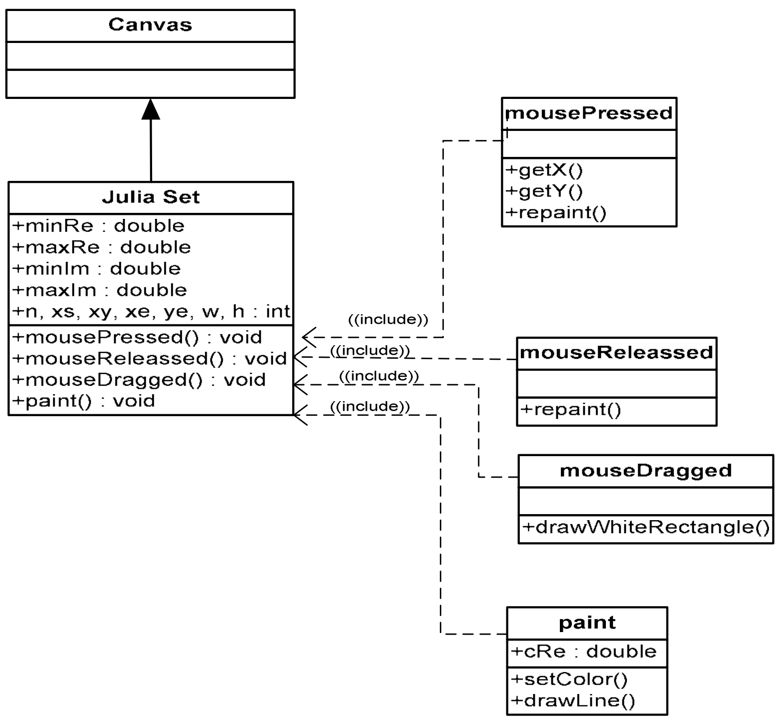
Use Case diagram pada Julia Set terlihat pada Gambar 24.



Gambar 24. Activity diagram Julia Set

iii. Class diagram

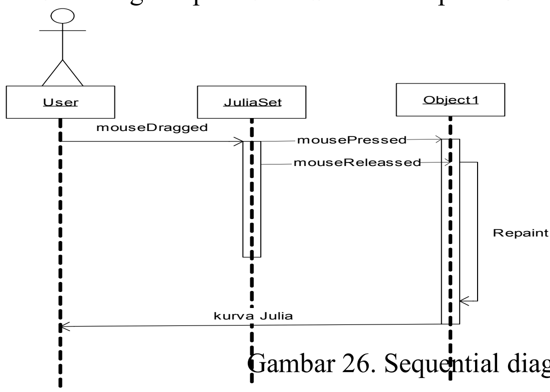
Method pendukung Julia Set sama seperti method pendukung Mandelbrot Set, method dalam Julia Set pada prinsipnya memiliki fungsi yang sama dengan method yang terdapat pada Mandelbrot Set



Gambar 25. Class diagram Julia Set

iv. Sequential diagram

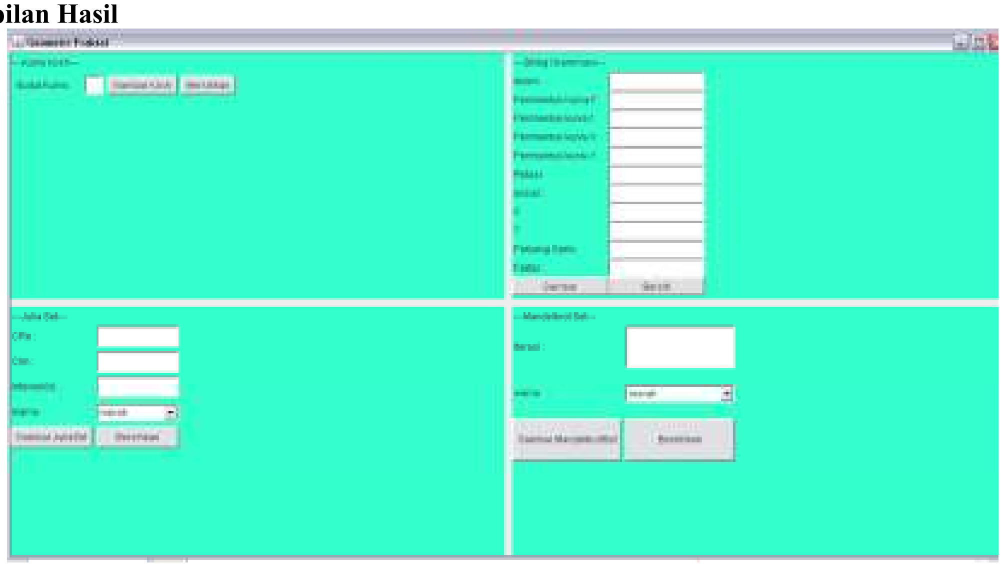
Use Case diagram pada Julia Set terlihat pada Gambar 26.



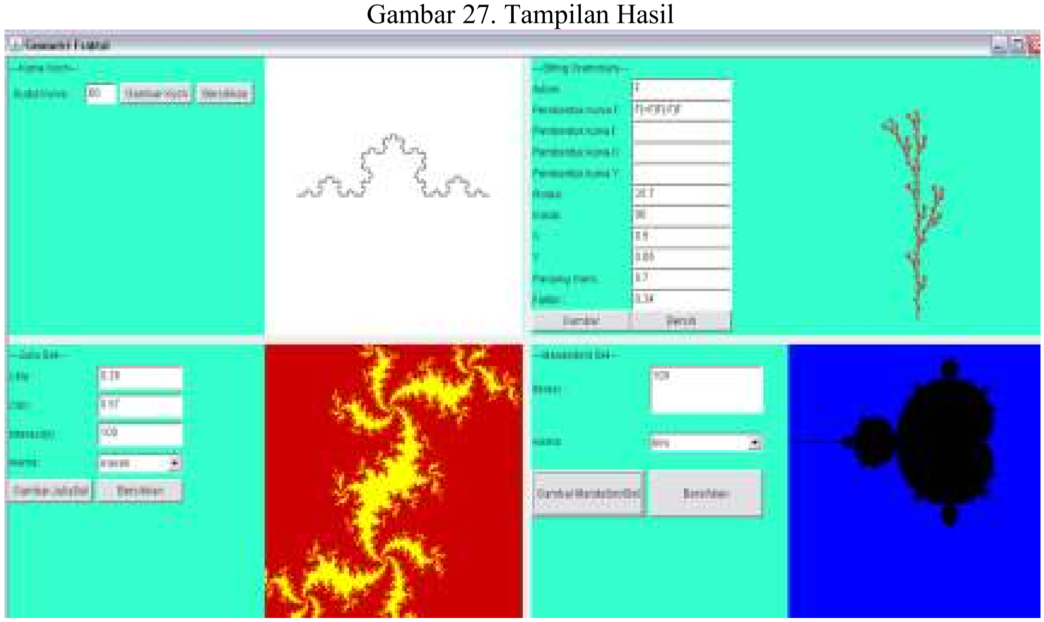
Gambar 26. Sequential diagram Julia Set

Implementasi

Tampilan Hasil



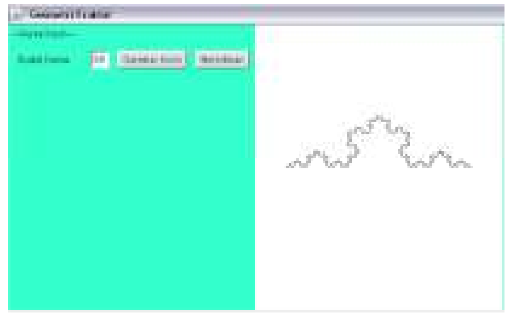
Gambar 27. Tampilan Hasil



Gambar 28. Tampilan Setelah Diisi

1. Panel Kurva Koch
Pada isian sudut kurva diisi 60, setelah tombol “Gambar Koch” di-klik maka akan muncul tampilan (Gambar 29) dan jika pada gambar kurva di-klik maka iterasi gambar kurva akan bertambah, sehingga menghasilkan Gambar 30

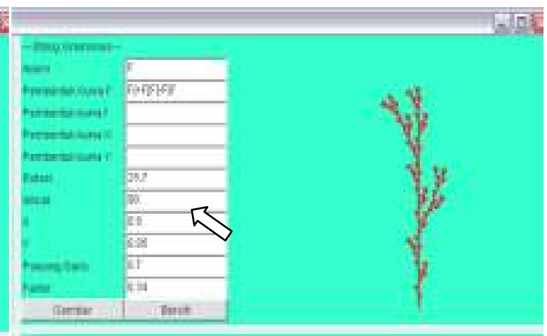
Gambar 29. Pengisian Panel Kurva Koch



Gambar 30. Kurva Koch setelah di-klik

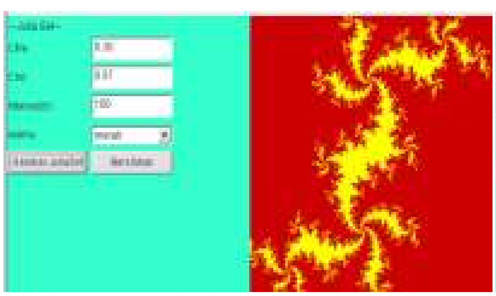
2. Panel String Grammars
Pada isian Axiom = F, StrF = F[+F]F[-F]F, Strf = nill(kosong), StrX = nill(kosong), StrY = nill(kosong), sudut = 25.7, Inisial = 90, X = 0.5, Y = 0.005, Garis = 0.7, Faktor = 0.5, setelah tombol “Gambar String” di-klik maka muncul Gambar 31. Jika pada gambar di-klik kiri beberapa kali maka gambar akan berubah menjadi Gambar 32.

Gambar 31. Panel String Grammars setelah diisi

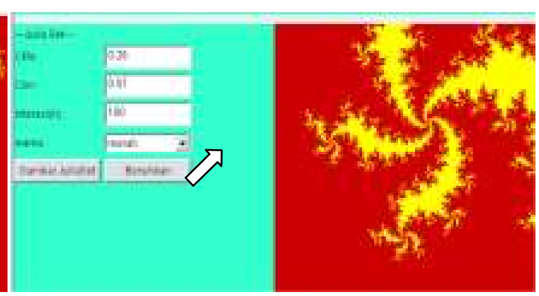


Gambar 32. Gambar ketika di-klik kiri 3 kali

3. Panel Julia Set
Pada isian CRe = 0.26, Cim = 0.57, Iterasi = 100 maka ketika tombol “Gambar Julia” di-klik, maka akan muncul Gambar 33. Kemudian pada gambar kita fokus dengan cara mouse-dragged maka setelah fokus dilepas maka akan muncul gambar perbesaran dari bagian yang difokus, seperti terlihat pada Gambar 34.

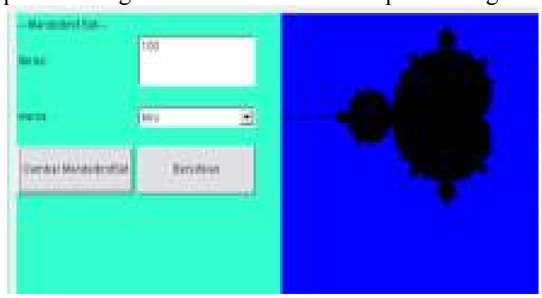


Gambar 33. Panel Julia setelah diisi

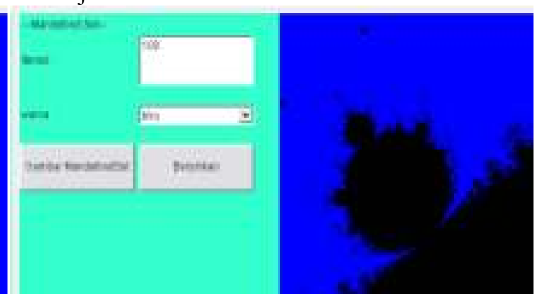


Gambar 34. Perbesaran gambar Julia Set

4. Panel Mendelbrot Set
Pada isiian Iterasi = 100, warna = biru, setelah tombol “Gambar Mandelbrot” di-klik maka akan muncul Gambar 35. Seperti pada Julia Set, fokuskan Mandelbrot Set dengan mouse-dragged untuk mendapatkan perbesaran gambar. Setelah fokus dilepas maka gambar menjadi Gambar 36.



Gambar 35. Mandelbrot setelah diisi



Gambar 36. Perbesaran Mandelbrot Set

Simpulan

Fraktal dapat diaplikasikan ke dalam bahasa pemrograman Java, bahkan aplikasinya dapat berupa GUI (*Graphics User Interface*) yang mana komponen pembentuk kurvanya dapat diinputkan secara manual.

Kurva Koch akan terbentuk dengan baik, jika sudut yang digunakan merupakan sudut-sudut istimewa seperti 30^0, 45^0, 60^0. Meskipun 90^0 merupakan sudut istimewa namun hasil kurva yang diciptakan dengan sudut 90^0 tidak bagus. Diantara sudut istimewa tersebut, kurva paling bagus terbentuk dari sudut 60^0.

String Grammars yang dapat dibentuk adalah Dragon curve, Hilbert curve, Sierpinski curve, Island curve, Tree1 curve, Tree2 curve, dan Tree3 curve.

Mandelbrot dan Julia Set akan mendapatkan kurva yang bagus, jika bilangan |**z**| adalah antara bagian real -2 sampai 2 dan bagian imaginer antara -2 sampai 2 dengan **c** < 1, dan iterasi > 100. Jika |**z**| tidak berada pada bilangan itu, maka kurva akan terlihat kecil. Sedangkan jika **c >** 1 maka tidak akan muncul gambar kurva. Dan jika iterasi < 100 maka kurva akan terlihat seperti melebar.

Daftar Pustaka

Ammeraal, Leen et al. 2007 .*Computer Graphics for Java Programing, second edition.html*. University of Texas at Dallas : England

Barnsley, Michael. 1988. *Fractal Everywhere*. Georgia Insitute Of Technology : Georgia

Budiyono, Drs. 1987. *Matematika*. Surakarta : Widya duta

Falconer, Kenneth. 1997. *Techniques in Fractal Geometry*. University Of St. Andreas : England

Irawan. 2007. Java *untuk Orang Awam*. Palembang : Maxikom

Hartati, Sri dkk. 2006. *Pemrograman GUI Swing Java dengan NetBens 5*. Yogyakarta : Andi

Soemantri R, 1994. *Fungsi Variabel Komplek*. Yogyakarta : Departemen Pendidikan dan Kebudayaan

Mandelbrot, Benoit. 1982. *The Fractal Geometry Of Nature*. W.H Freeman and Company : New York

Setiawan, Suryana MSc. *UML*.ppt . Program Magister Teknologi Informasi Fakultas Ilmu Komputer Universitas Indonesi

Sinaga, Benyamin L. 2005. *Pemrograman Berorientasi Objek dengan Java*. Yogyakarta : Gava Media

Dazibao. *The Mandelbrot Dazibao*. http://mandelbrot-dazibao.com/mset/, diakses pada 17 Januari 2009 jam 18.36

Roth, Katty. *Fractal For The Compleat Idiot*. http://tonkoppens.nl, diakses pada 30 Januari 2009 jam 08.37

Wikipedia*. Fraktal*. http://wikipedia.org/wiki/Fraktal, *Fraktal,* diakses pada 5 November 2008 jam 09.52

Yuliani, Refi Elfira. *Melanjutkan Tentang Keindahan Geometri Fraktal*. http://refi07.wordpress.com. diakses pada 2 Desember 2008, jam 16.09